Einführung in

Computer Microsystems

Sommersemester 2010

Wolfgang Heenes

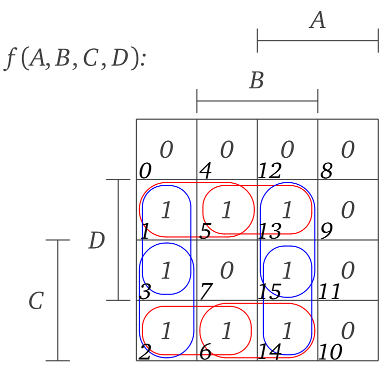
10. Aufgabenblatt mit Lösungsvorschlag

23.06.2010

Aufgabe 1: Zusatzaufgaben: Quine-McCluskey-Methode

Minimieren Sie die folgende Funktion mittels der Quine-McCluskey-Methode:

a) $f(A,B,C,D) = \sum m(1,2,3,5,6,13,14,15)$



Im ersten Schritt werden alle Minterme nach der Anzahl der Einsen gruppiert.

1-Eins	0001, 0010
2-Einsen	0011, 0101, 0110
3-Einsen	1101, 1110
4-Einsen	1111

Über die Implikationstabelle werden alle Primimplikanten erstellt.

Spalte 1	Spalte 2
0001√	00−1⋆
0010√	0−01⋆
	001−⋆
	0−10⋆
0011√	−101⋆
0101√	−110⋆
0110√	
1101√	11−1⋆
1110√	111−⋆
1111√	

Nun muss noch die minimale Überdeckung der Primimplikanten gesucht werden.

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−01	X			X				
001−		X	X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
−110					X		X	
11−1						X		X
111−							X	X

Es existieren keine Kernimplikanten. Vereinfachung von Spalten und Zeilen ist nicht möglich (Spalten- und Zeilendominanz). Die Quine-McCluskey-Methode aus der 10. Vorlesung von Folie 22 ist damit bis Schritt 8 abgearbeitet. Es wird die Restüberdeckung (Schritt 9) bestimmt. Für die Bestimmung der Restüberdeckung können verschiedene Optimierungen angewendet werden. Als Optimierung wird hier die Zeilendominanzregel verwendet.

Ein Primimplikant (es ist unerheblich welcher Primimplikant) wird in die Lösungsmenge übernommen. Beispielhaft wird der Primimplikant 00−1 *übernommen.*

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−01	X			X				
001−		X	X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
−110					X		X	
11−1						X		X
111−							X	X

Die Minterme 0001 *und* 0011 *werden von dem Primimplikanten* 00−1 *überdeckt.*

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−01	X			X				
001−		X	X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
−110					X		X	
11−1						X		X
111−							X	X

Der Primimplikant 0−01 *kann jetzt gelöscht werden. Er wird von dem Primimplikanten* −101 *dominiert. Ebenso wird der Primimplikant* 001− *von* 0−10 *dominiert. Die Tabelle vereinfacht sich zu:*

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
−110					X		X	
11−1						X		X
111−							X	X

Es sind nun keine weiteren Vereinfachungen mit der Zeilendominanzregel möglich. Es wird wieder ein Primimplikant ausgewählt. Beispielhaft wird der Primimplikant 0−10 *übernommen.*

Hinweis: Die Anwendung der Spaltendominanzregel wäre hier zusätzlich möglich. Der Minterm 0110 *dominiert den Minterm* 0010*. Ebenso kann der Primimplikant* 0−10 *bezüglich des verbleibenden Restproblems als Kernimplikant identifiziert werden.*

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
−110					X		X	
11−1						X		X
111−							X	X

Der Primimplikant −110 *kann auf Grund der Zeilendominanzregel gelöscht werden.*

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
11−1						X		X
111−							X	X

Nach diesem Schritt sind wieder keine weiteren Vereinfachungen möglich. Es wird wieder ein Primimplikant ausgewählt. Beispielhaft wird der Primimplikant −101 *übernommen.*

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
11−1						X		X
111−							X	X

Der Primimplikant 11−1 *wird von* 111− *dominiert. Er kann gelöscht werden. Für die restlichen beiden Minterme bleibt der Primterm* 111− *übrig.*

	0001	0010	0011	0101	0110	1101	1110	1111
00−1	X		X					
0−10		X			X			
−101				X		X		
111−							X	X

Alle Minterme sind von mindestens einem Primterm überdeckt. Für die Lösung werden vier Primimplikanten benötigt. Um die minimale Überdeckung von Primtermen zu finden, müssen alle Kombinationen ausprobiert werden. Die aktuelle Lösung kann aber für Optimierungen herangezogen werden. Benötigt eine andere Zwischenlösung mehr als vier Primimplikanten und wurden noch nicht alle Minterme überdeckt, so kann diese Lösung nicht (mehr) minimal sein. Weitere Optimierungen können u.a. durch zusätzliche Anwendung der Spaltendominanzregel sowie durch identifizieren von Kernimplikanten in den Zwischenschritten erreicht werden.

Aus dem KV-Diagramm kann man erkennen, das die Lösung aus vier Primimplikanten besteht. Die Funktion kann aber auch durch vier andere Primimplikanten minimal überdeckt werden. Es gibt in diesem Fall mehrere minimale Lösungen. Welche dieser gleichwertigen minimalen Lösungen man zuerst erhält, ist abhänging von der Reihenfolge der Primterme, die man in die Lösungsmenge übernimmt.

Die minimale Lösung lautet:
$f(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot D + \overline{A}\cdot C\cdot\overline{D} + B\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C$

b) $f(A,B,C,D) = \sum m(0,1,4,5,12,13)$

Gruppieren der Minterme nach der Anzahl der Einsen. Über die Implikationstabelle werden alle Primimplikanten erstellt.

Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
0000✓	000−✓	0−0−*
	0−00✓	
0001✓	0−01✓	−10−*
0100✓	010−✓	
	−100✓	
0101✓	−101✓	
1100✓	110−✓	
1101✓		

Nun müssen die Kernimplikanten und minimale Überdeckung der Primimplikanten gefunden werden.

	0000	0001	0100	0101	1100	1101
0−0−	X	X	X	X		
−10−			X	X	X	X

Da es zu jedem Primimplikanten mindesten einen Minterm gibt, der nur von diesem Primimplikanten überdeckt wird (ein X in einer Spalte), sind die zwei Primimplikanten auch Kernimplikanten. Die zwei Kernimplikanten sind Bestandteil der minimalen Lösung.

Die minimale Lösung lautet:
$f(A,B,C,D) = \overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C}$

c) $f(X,Y,Z) = \sum m(2,3,4,5)$

Gruppieren der Minterme nach der Anzahl der Einsen. Über die Implikationstabelle werden alle Primimplikanten erstellt.

Spalte 1	Spalte 2
010✓	01−
100✓	10−
011✓	
101✓	

Nun müssen die Kernimplikanten und minimale Überdeckung der Primimplikanten gefunden werden.

	010	011	100	101
01−	X	X		
10−			X	X

Beide Primimplikanten werden zur Überdeckung der Funktion benötigt (=Kernimplikanten).

Die minimale Lösung lautet:
$f(X,Y,Z) = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$