Grundlagen der

Rechnertechnologie

Sommersemester 2010

Wolfgang Heenes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

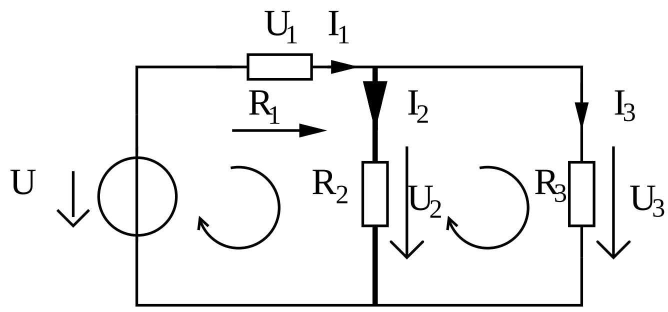
5. Aufgabenblatt mit Lösungsvorschlag

18.05.2010

Wiederholung der verschiedenen Berechnungsmethoden bei linearen Netzen, Nachbearbeitung 1. Labor

Aufgabe 1: Berechnungsmethoden

Zur Demonstration der verschiedenen Verfahren: Gegeben ist folgendes Netzwerk.



Folgende Größen sind gegeben:

- $U = 10V$
- $R_1 = 5\Omega$
- $R_2 = 10\Omega$
- $R_3 = 20\Omega$

Bestimmen sie für folgende Verfahren jeweils die Ströme I_1, I_2 und I_3

a) *Ohmsches Gesetz*

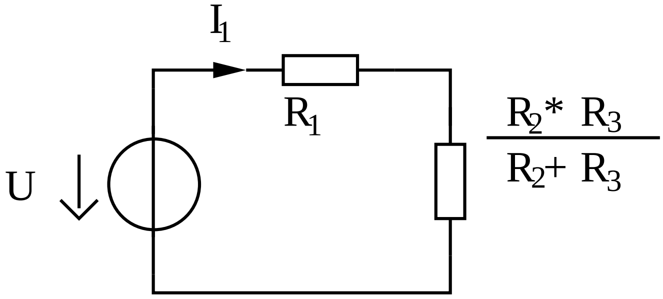
b) *Gleichungssystem mit Kirchhoff/Ohmsches Gesetz*

c) *Ersatzspannungsquelle*

d) *Maschenstromverfahren*

Lösungsvorschlag:

a) Ohmsches Gesetz: Der Strom I_1 ist einfach zu berechnen.



$$I_1 = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{10V}{5\Omega + \frac{200\Omega^2}{30\Omega}} = \frac{10V}{11\frac{2}{3}\Omega} = \frac{6}{7}A$$

Aus der Schaltung sieht man, dass $U_2 = U_3$ ist.

$$\begin{aligned} U_2 &= U_3 = \frac{6}{7}A \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6}{7}A \cdot \frac{200}{30}\Omega = 5\frac{5}{7}V \\ I_2 &= \frac{U_2}{R_2} = \frac{5\frac{5}{7}V}{10\Omega} = \frac{4}{7}A \\ I_3 &= \frac{U_3}{R_3} = \frac{5\frac{5}{7}V}{20\Omega} = \frac{2}{7}A \end{aligned}$$

Zur Kontrolle die Knotengleichung:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ \frac{6}{7}A &= \frac{4}{7}A + \frac{2}{7}A \checkmark \end{aligned}$$

b) Gleichungssystem mit Kirchhoff/Ohmsches Gesetz

- Knotengleichung: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
- Maschengleichung:
  a) $U_2 = U_3$
  b) $U - U_1 - U_2 = 0$
- Ohmsches Gesetz:
  a) $U_1 = R_1 \cdot I_1$
  b) $U_2 = R_2 \cdot I_2$
  c) $U_3 = R_3 \cdot I_3$

$$\begin{aligned} -U_2 + U_3 &= 0 \\ -R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 &= 0 \qquad I_2 = I_1 - I_3! \\ -R_2 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_3 &= 0 \\ -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= U \\ R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 &= 0 \qquad I_2 = I_1 - I_3! \\ R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ein Gleichungssystem für die Ströme I_1 und I_3

$$\begin{aligned} -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_3 &= 0 \\ (R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_3 &= U \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -R_2 & (R_2 + R_3) \\ (R_1 + R_2) & -R_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}$$

Lösung über Determinante:

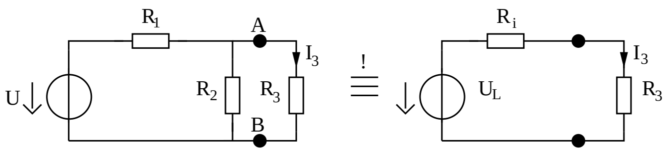
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & (R_2 + R_3) \\ U & -R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -R_2 & (R_2 + R_3) \\ (R_1 + R_2) & -R_2 \end{vmatrix}} = \frac{U \cdot (R_2 + R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -R_2 & 0 \\ (R_1 + R_2) & U \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -R_2 & (R_2 + R_3) \\ (R_1 + R_2) & -R_2 \end{vmatrix}} = \frac{U \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

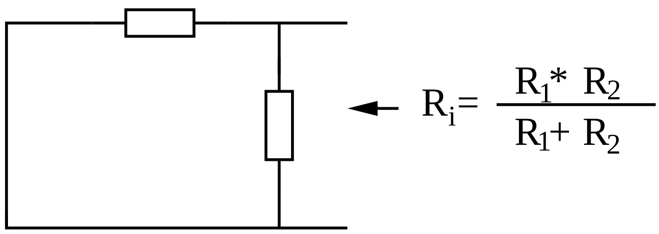
I_2 ergibt sich aus: $I_2 = I_1 - I_3$

c) Ersatzspannungsquelle:

Man kann z. B. mit I_3 anfangen

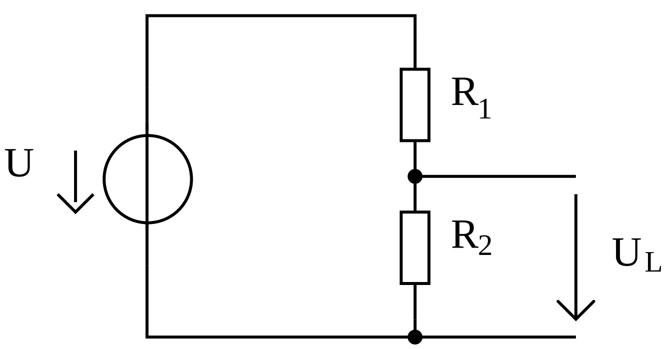


R_1 bezüglich den Punkten A und B bestimmen. Spannungsquelle kurzschließen.



$$R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

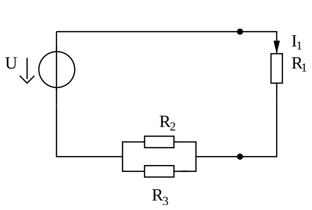
U_L bestimmen:



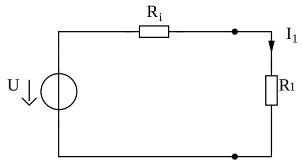
$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$I_3 = \frac{U_L}{R_i + R_3} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot U}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} + R_3} \Longrightarrow \frac{U \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

Schaltung zur Berechnung von I_1



$\overset{!}{\equiv}$

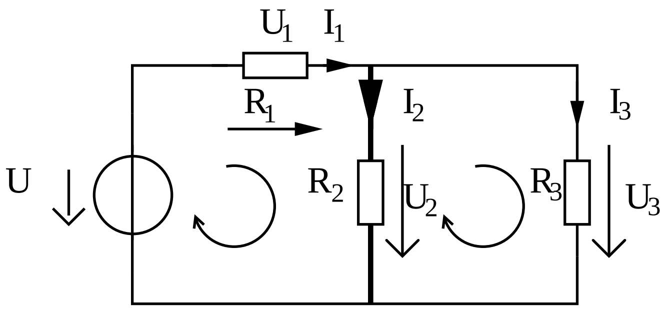


$$R_i = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \qquad U_L = U$$

$$I_1 = \frac{U_L}{R_1 + R_i} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}} \Longrightarrow \frac{U \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

I_2 entweder über die Knotengleichung berechnen oder genauso wie I_1 und I_3!

d) Maschenstromverfahren



- Anzahl der Zweige (z): 3
- Anzahl der Knoten (k): 2
- Anzahl der Maschen: 3
- Anzahl der Baumzweige: $b = 2 - 1 = 1$
- Anzahl der unabhängigen Gleichungen: $m = 3 - (2 - 1) = 2$
- Aufstellen der Maschengleichungen:

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_3) = U \quad \Longrightarrow \quad (R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_3 = U$$
$$R_3 \cdot I_3 - R_2 \cdot (I_1 - I_3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_3 = 0$$

Für die Berechnung von I_1 und I_3 wurden die Umlaufrichtungen entsprechend der Zählpfeilrichtung des Verbindungsstroms gewählt.

- Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$$